# Solitões escuros e respiradores como solução da equação não linear de Schrödinger

Francisco Lobo Yuliy Bludov

Departamento de ciências
Universidade do Minho

Projeto de Investigação, Agosto 2021

# Plano de Trabalhos

1. Introdução e Motivação

# Plano de Trabalhos

1. Introdução e Motivação
2. Modulação de Instabilidade

# Plano de Trabalhos

1. Introdução e Motivação
2. Modulação de Instabilidade
3. Solitão

# Plano de Trabalhos

# Plano de Trabalhos

1. Introdução e Motivação
2. Modulação de Instabilidade
3. Solitão
   - Definição
   - Solitão Escuro

# Plano de Trabalhos

# Plano de Trabalhos

# Plano de Trabalhos

# Plano de Trabalhos

# Plano de Trabalhos

# Plano de Trabalhos

# Plano de Trabalhos

# Introdução e Motivação

# Introdução e Motivação

## Exemplo de equações não lineares

$$\frac{du}{dx} + u^2 = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin(\theta) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

## Exemplo de equações não lineares

$$\frac{du}{dx} + u^2 = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin(\theta) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

# Introdução e Motivação

## Exemplo de equações não lineares

$$\frac{du}{dx} + u^2 = 0, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin(\theta) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

## Equação não linear de Schrödinger (forma adimensional)

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sigma|\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

# Modulação de Instabilidade

# Modulação de Instabilidade

## Equação não linear de Schrödinger (forma adimensional)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \sigma|\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

# Modulação de Instabilidade

## Equação não linear de Schrödinger (forma adimensional)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \sigma|\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

## Solução de Onda Plana

$$\psi(x,t) = \rho e^{iQx - i\Omega t}$$

# Modulação de Instabilidade

## Equação não linear de Schrödinger (forma adimensional)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \sigma|\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

## Solução de Onda Plana

$$\psi(x,t) = \rho e^{iQx - i\Omega t}$$

## Relação de Dispersão num meio não linear

$$\Omega = Q^2 \pm \sigma\rho^2$$

# Modulação de Instabilidade

## Equação não linear de Schrödinger (forma adimensional)

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sigma|\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

## Solução de Onda Plana

$$\psi(x,t) = \rho e^{iQx - i\Omega t}$$

## Relação de Dispersão num meio não linear

$$\Omega = Q^2 \pm \sigma\rho^2$$

## Relação de Dispersão num meio não linear homogéneo

$$\Omega = \pm\rho^2$$

# Modulação de Instabilidade

## Perturbação pequena, $|V(x,t)| \ll \rho$

$$V(x,t) = Ae^{iqx - i\omega t} + B^* e^{-iqx + i\omega^* t}$$

# Modulação de Instabilidade

## Perturbação pequena, $|V(x,t)| \ll \rho$

$$V(x,t) = Ae^{iqx - i\omega t} + B^* e^{-iqx + i\omega^* t}$$

## Modulação de Instabilidade

$$\omega = \pm |q| \sqrt{(q^2 - 2\sigma\rho^2)}$$

# Modulação de Instabilidade

## Perturbação pequena, $|V(x,t)| \ll \rho$

$$V(x,t) = Ae^{iqx - i\omega t} + B^* e^{-iqx + i\omega^* t}$$

## Modulação de Instabilidade

$$\omega = \pm |q| \sqrt{(q^2 - 2\sigma\rho^2)}$$

## Meio modulacionalmente estável: $\sigma < 0$ ou $[\sigma > 0$ e $q > \sqrt{2\sigma}\rho]$

$\omega \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Fundo estável de amplitude constante

# Modulação de Instabilidade

## Perturbação pequena, $|V(x,t)| \ll \rho$

$$V(x,t) = Ae^{iqx - i\omega t} + B^* e^{-iqx + i\omega^* t}$$

## Modulação de Instabilidade

$$\omega = \pm |q| \sqrt{(q^2 - 2\sigma\rho^2)}$$

## Meio modulacionalmente estável: $\sigma < 0$ ou $[\sigma > 0$ e $q > \sqrt{2\sigma}\rho]$

$\omega \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Fundo estável de amplitude constante

## Meio modulacionalmente instável: $\sigma > 0$ e $q < \sqrt{2\sigma}\rho$

$\omega \in \mathbb{C} \Rightarrow$ Fundo instável

# Definição Solitão

# Definição Solitão

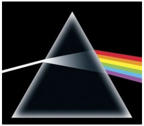
## Solitão

Solução de onda localizada que se propaga mantendo a sua forma e velocidade constante devido ao equilíbrio entre difração natural e efeitos não lineares do meio. Numa colisão estes permanecem inalterados expecto por uma mudança de fase.

# Definição Solitão

## Solitão

Solução de onda localizada que se propaga mantendo a sua forma e velocidade constante devido ao equilíbrio entre difração natural e efeitos não lineares do meio. Numa colisão estes permanecem inalterados expecto por uma mudança de fase.



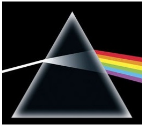
## Difração linear

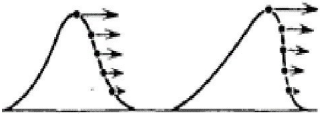
Comprimentos de onda maiores têm maior velocidade

# Definição Solitão

## Solitão

Solução de onda localizada que se propaga mantendo a sua forma e velocidade constante devido ao equilíbrio entre difração natural e efeitos não lineares do meio. Numa colisão estes permanecem inalterados expecto por uma mudança de fase.





## Difração linear

Comprimentos de onda maiores têm maior velocidade

## Difração não linear de Kerr

Amplitudes maiores têm maior velocidade

# Solitão Escuro

## Equação não linear de Schrödinger com $\sigma = -1$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - |\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

# Solitão Escuro

## Equação não linear de Schrödinger com $\sigma = -1$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - |\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

## Ansatz Solitão Escuro

$$\psi(x,t) = \phi(x)e^{-i\Omega t}$$

# Solitão Escuro

## Equação não linear de Schrödinger com $\sigma = -1$

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t) = 0$$

## Ansatz Solitão Escuro

$$\psi(x,t) = \phi(x) e^{-i\Omega t}$$

## Condições de Fronteira

$$\phi(+\infty) = \pm\rho, \quad \phi(-\infty) = \mp\rho, \quad \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=\pm\infty} = 0$$

# Solitão Escuro

$$\Omega\phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \phi^3 = 0$$

# Solitão Escuro

$$\Omega\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \phi^3 = 0$$

$$\Omega\phi^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\phi^4 = C$$

# Solitão Escuro

$$\Omega\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \phi^3 = 0$$

$$\Omega\phi^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\phi^4 = C$$

$$C = \Omega\rho^2 - \frac{1}{2}\rho^4 = \frac{\Omega^2}{2}$$

# Solitão Escuro

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Omega - \phi^2\right)$$

# Solitão Escuro

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Omega - \phi^2\right)$$

$$\frac{d\phi}{\Omega - \phi^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} dx$$

# Solitão Escuro

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Omega - \phi^2\right)$$

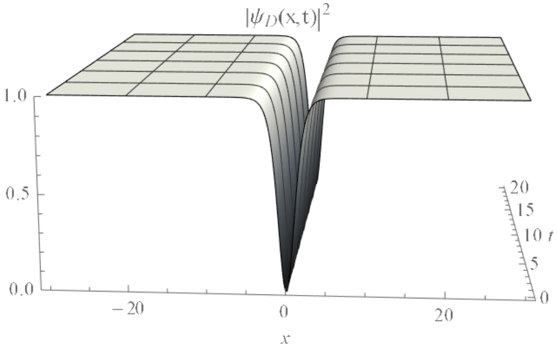
$$\frac{d\phi}{\Omega - \phi^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} dx$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{\Omega}} \phi(x), \quad \int \frac{dy}{1 - y^2} = \pm \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \int dx$$

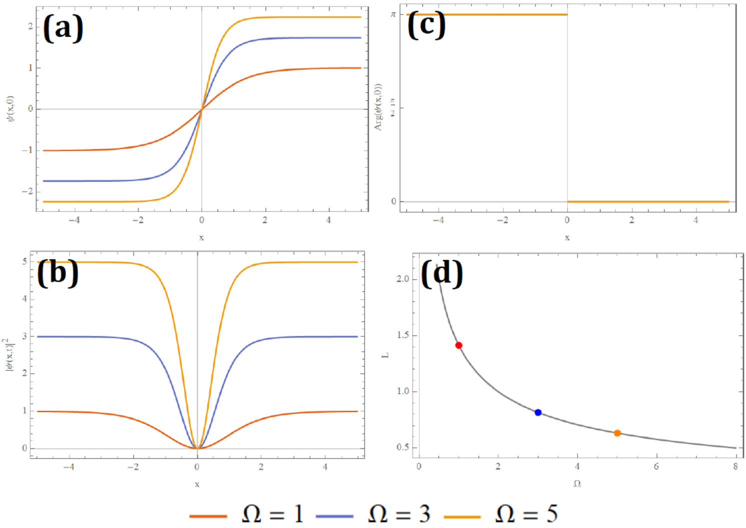
# Solitão Escuro

## Solução Solitão Escuro

$$\psi_D(x,t) = \sqrt{\Omega}\tanh\left(\sqrt{\frac{\Omega}{2}}x\right)e^{-i\Omega t}$$



# Solitão Escuro



# Solitão Cinzento

# Solitão Cinzento

## Equação não linear de Schrödinger com $\sigma = -1$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - |\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

# Solitão Cinzento

## Equação não linear de Schrödinger com $\sigma = -1$

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t) = 0$$

## Ansatz Solitão Cinzento

$$\psi(x,t) = [f(x - vt) + ig(x - vt)]e^{-i\Omega t}$$

# Solitão Cinzento

## Equação não linear de Schrödinger com $\sigma = -1$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - |\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

## Ansatz Solitão Cinzento

$$\psi(x,t) = [f(x-vt) + ig(x-vt)]e^{-i\Omega t}$$

## Condições de Fronteira

$$\{f(\pm\infty)\}^2 + \{g(\pm\infty)\}^2 = \rho^2 = \Omega, \quad \left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_{\xi=\pm\infty} = 0 \text{ onde } \xi = x - vt$$

# Solitão Cinzento

## Equação não linear de Schrödinger com $\sigma = -1$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - |\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

## Ansatz Solitão Cinzento

$$\psi(x,t) = [f(x-vt) + ig(x-vt)]e^{-i\Omega t}$$

## Condições de Fronteira

$$\{f(\pm\infty)\}^2 + \{g(\pm\infty)\}^2 = \rho^2 = \Omega, \quad \left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_{\xi=\pm\infty} = 0 \text{ onde } \xi = x - vt$$

## Condição imposta

$$g(x-vt) = const = G = \pm v/\sqrt{2}$$

# Solitão Cinzento

## Solução Solitão Cinzento

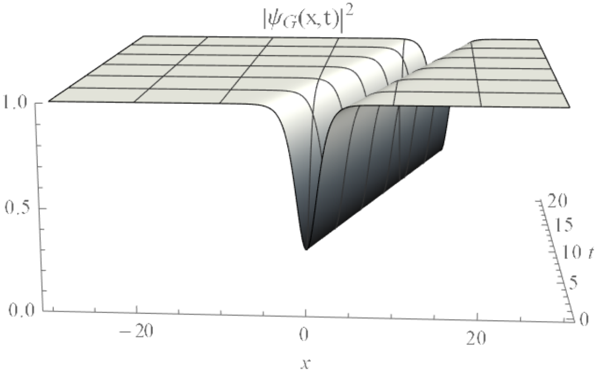
$$\psi_G(x,t) = \sqrt{\Omega}\left(i\sin(\theta) + \cos(\theta)\tanh\left[\frac{\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2}}\cos(\theta)(x - v_c\sin(\theta)t)\right]\right)e^{-i\Omega t}$$

## Substituições para Parâmetro Único

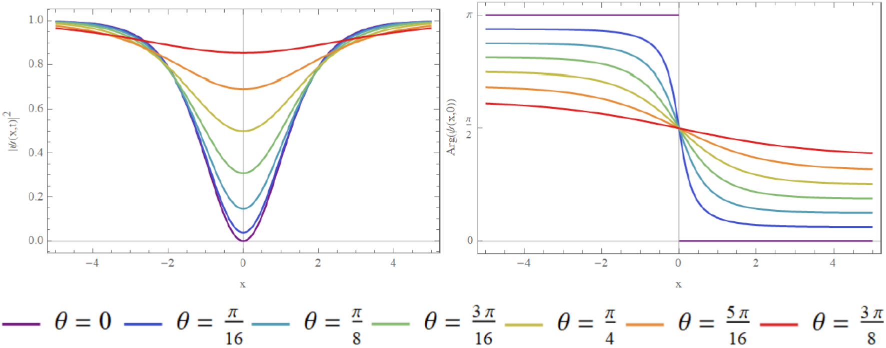
$$\sin\theta = \frac{v}{v_c}, \quad \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_c^2}}, \quad v_c = \sqrt{2\Omega}$$

## Solução Solitão Cinzento

$$\psi_G(x,t) = \sqrt{\Omega}\left(i\sin(\theta) + \cos(\theta)\tanh\left[\frac{\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2}}\cos(\theta)(x - v_c\sin(\theta)t)\right]\right)e^{-i\Omega t}$$



# Solitão Cinzento



# Definição Respirador

# Definição Respirador

**Respirador**

Solução de onda periódica não linear fortemente localizada.

# Definição Respirador

## Respirador

Solução de onda periódica não linear fortemente localizada.

## Equação não linear de Schrödinger com $\sigma = +1$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + |\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

# Definição Respirador

## Respirador

Solução de onda periódica não linear fortemente localizada.

## Equação não linear de Schrödinger com $\sigma = +1$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + |\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

## Ansatz Respirador

$$\psi(x,t) = [Q(x,t) + i\delta(t)]e^{i\varphi(t)}$$

# Definição Respirador

## Respirador

Solução de onda periódica não linear fortemente localizada.

## Equação não linear de Schrödinger com $\sigma = +1$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + |\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0$$

## Ansatz Respirador

$$\psi(x,t) = [Q(x,t) + i\delta(t)]e^{i\varphi(t)}$$

## Constantes de Parametrização

$$D = 16a^2, \quad H = 4a - \frac{1}{2}, \quad W = 4a - 1,$$

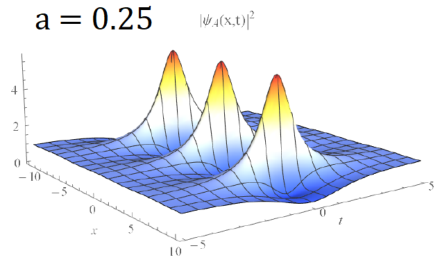
# Respirador de Akhmediev

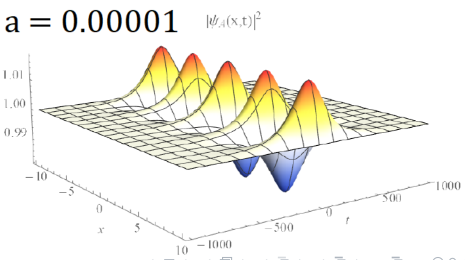
## Solução Respirador de Akhmediev

$$\psi_A(x,t) = \left[1 + \frac{\beta^2 \cosh(\alpha t) + i\alpha \sinh(\alpha t)}{\sqrt{2a}\cos(\beta x) - \cosh(\alpha t)}\right] e^{it}$$

## Definição das constantes $a$, $\alpha$, $\beta$

$$0 < a < 1/2, \quad \beta = \sqrt{2(1-2a)}, \quad \alpha = 2\sqrt{a}\beta$$



# Respirador de Kuznetsov-Ma

## Definição das constantes $a$, $\alpha$, $\beta$

$$0 < a < 1/2, \quad \beta = \sqrt{2(1-2a)}, \quad \alpha = 2\sqrt{a}\beta$$

## Alterações caso $a > 1/2$

$$\beta = i\beta', \quad \alpha = i\alpha'$$

$$\cosh(\alpha t) = \cos\left(\alpha' t\right), \quad \sinh(\alpha) = i \sinh\left(\alpha' t\right), \quad \cos(\beta x) = \cosh\left(\beta' x\right)$$

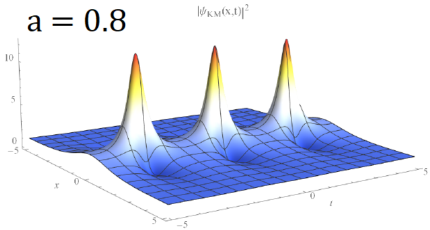
# Respirador de Kuznetsov-Ma

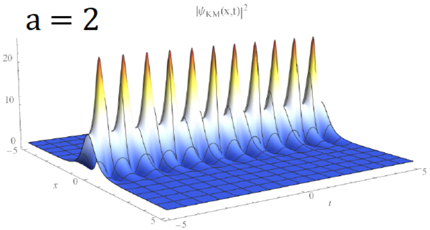
## Solução Respirador de Kuznetsov-Ma

$$\psi(x,t) = \left[1 - \frac{(\beta')^2\cos(\alpha' t) + i\alpha'\sin(\alpha' t)}{\sqrt{2a}\cosh(\beta' x) - \cos(\alpha' t)}\right] e^{it}$$

## Definição das constantes $a$, $\alpha$, $\beta$

$$a > 1/2, \quad \beta' = \sqrt{2(2a-1)}, \quad \alpha' = 2\sqrt{a}\beta'$$



# Solitão Peregrino

## Definição das constantes $a$, $\alpha$, $\beta$

$$0 < a < 1/2, \quad \beta = \sqrt{2(1-2a)}, \quad \alpha = 2\sqrt{a}\beta$$

## Aproximações caso $a \to 1/2$

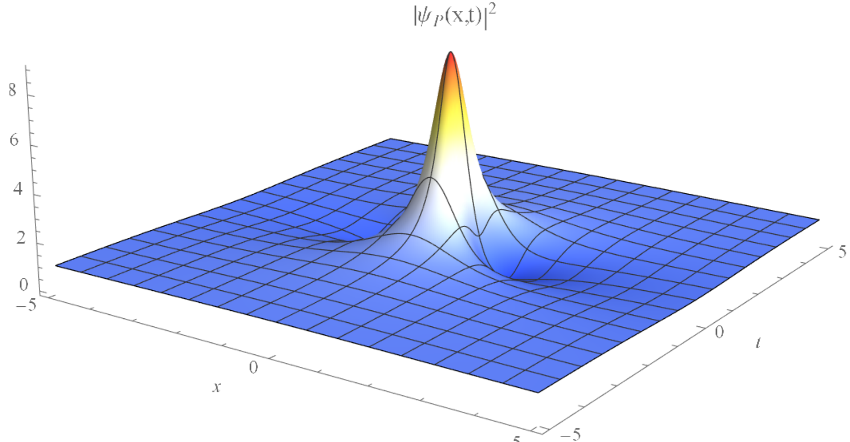
$$\alpha \approx \sqrt{2}\beta, \quad \sqrt{2a} \approx 1 - \beta^2/4$$

$$\cos(\beta x) \approx 1 - (\beta x)^2/2, \quad \sinh(\alpha t) \approx \sqrt{2}\beta t, \quad \cosh(\alpha t) \approx 1 + (\beta t)^2$$

# Solitão Peregrino

## Solução Solitão Peregrino

$$\psi_P(x,t) = \left[1 - 4\frac{1+2it}{1+2x^2+4t^2}\right] e^{it}$$



# Conclusões

# Conclusões

## Solitão escuro

1) Estacionário 2) Mínimo nulo no centro
3) Phase shift abrupto de $\pi$ no centro

# Conclusões

## Solitão escuro

1) Estacionário 2) Mínimo nulo no centro
3) Phase shift abrupto de $\pi$ no centro

## Solitão cinzento

1) Não estacionário 2) Mínimo não nulo no centro 3) Phase shift gradual

# Conclusões

## Solitão escuro

1) Estacionário 2) Mínimo nulo no centro
3) Phase shift abrupto de $\pi$ no centro

## Solitão cinzento

1) Não estacionário 2) Mínimo não nulo no centro 3) Phase shift gradual

## Respirador de Akhmediev

Localizado no tempo mas oscila no espaço

# Conclusões

## Solitão escuro

1) Estacionário 2) Mínimo nulo no centro
3) Phase shift abrupto de $\pi$ no centro

## Solitão cinzento

1) Não estacionário 2) Mínimo não nulo no centro 3) Phase shift gradual

## Respirador de Akhmediev

Localizado no tempo mas oscila no espaço

## Respirador de Kuznetsov-Ma

Localizado no espaço mas oscila no tempo

# Conclusões

## Solitão escuro

1) Estacionário 2) Mínimo nulo no centro
3) Phase shift abrupto de $\pi$ no centro

## Solitão cinzento

1) Não estacionário 2) Mínimo não nulo no centro 3) Phase shift gradual

## Respirador de Akhmediev

Localizado no tempo mas oscila no espaço

## Respirador de Kuznetsov-Ma

Localizado no espaço mas oscila no tempo

## Solitão Peregrino

Localizado no espaço e no tempo

# Obrigado!